Co nového v přírodních vědách

Jak matematika popsala chaos

EDUARD FUCHS

K dobrému tónu v „intelektuální" společnosti patří řada myšlenkových klišé. Mezi nejoblíbenější zcela jistě patří zdůraznění faktu, že řečník či dotázaný „nikdy nerozuměl matematice". Ponechme nyní stranou, proč právě matematice se dostalo této „výsady"; dotyčný by asi stejně bezstarostně neprezentoval, že „nikdy nepochopil, kde je Austrálie" nebo že „nikdy nerozuměl jazyku českému", byť poslední fakt by z úst řady příslušníků mladší generace zněl velmi věrohodně.

Abychom však byli objektivní, je nutno uznat, že jeden z důvodů zmíněného faktu spočívá mnohdy ve způsobu, jímž je matematika na základních a středních školách prezentována. Ne jako působivý nástroj vidění a popisu světa, ale jako nezáživná sbírka formulek a postupů; ne jako návod ke kritickému myšlení, ale biflování nesrozumitelných pouček. A tak dochází k tomu, že místo toho, aby poznávání matematiky napomáhalo propojení exaktního a humanitního vzdělání, dochází i na „univerzitní" úrovni leckdy k jejich vzájemnému odcizení. Učitel kreslení či dějepisu pak bohorovně pronáší výše zmíněnou sentenci o matematice a přitom by měl vědět, že obrazu v galerii nemůže porozumět ten, kdo nemá ani ponětí o perspektivě či kompozici a neví, co to je zlatý řez, nebo že pro pochopení vývoje lidstva v 17. století je důležitější zvrat v lidském myšlení, který znamenalo například dílo Newtonovo než znalost data, kdy se stal ruským carem Fjodor III.

Toto konstatování je však naprosto symetrické, pokud jde o vzájemné vztahy exaktních a humanitních věd. Matematiku nemůže dobře učit ten, kdo se v životě nezadíval na obraz v galerii nebo alespoň do knihy o výtvarném umění, matematik nemůže správně pochopit Eukleidovy *Základy*, docenit jejich velikost a geniální stavbu, neví-li nic o Aristotelovi a Platonovi a neumí-li se orientovat v epochálním antickém období.

Pokusme se nyní na jednom příkladě z posledních desetiletí dokumentovat, že matematika je v tom nejkrásnějším slova smyslu dobrodružstvím poznávání a že může svými metodami a výsledky zcela zásadně ovlivnit jiné vědní disciplíny neočekávaným způsobem.

Chaos

V některých oblastech je využití matematiky samozřejmé i pro naprostého laika: máme-li vypočítat objem nějakého tělesa, spočítat úroky v bance či určit dobu, za niž doletí raketa k Měsíci, je zřejmé. že využijeme nějaké matematické vztahy. Několikrát v historii vědy však nastala situace, kdy se matematické zákonitosti projevily v oblastech zcela nečekaných. Zkusme si jen představit, jak překvapující muselo v 17. století být, když se v dílech Fermata, Pascala a dalších začala formovat teorie pravděpodobnosti a když se ukázalo, že matematickým zákonitostem je podrobeno to, co se již svým pojmenováním zákonitosti vzpírá – a to *náhoda.*

Od středověku bylo v podstatě samozřejmé, že matematika nalézá uplatnění v přírodních vědách, především pak ve fyzice. V posledním století však matematika postupně pronikala i do řady vědních disciplín, kde se její využití dříve zdálo takřka vyloučené – do lingvistiky, hudební teorie, psychologie apod. Přesto však existovaly oblasti, kde se zdálo, že matematické metody jsou nepoužitelné. Jejich společným jmenovatelem byl jediný pojem: *chaos.*

Tam, kde začíná chaos, tam končí klasická věda. Chaos představoval náhodnou, nepředstavitelnou a nepředvídatelnou tvář přírody, vzpírající se kauzalitě a všem známým zákonitostem. Ze školních let si jistě všichni vzpomínáme na *Brownův pohyb.* Mikroskopické částečky se trhavě pohybují v nepředvídatelných kličkách. Jako by v jejich klikatém pohybu byl jistý řád, a přesto je pohyb jednotlivých částeček zcela nepředvídatelný.

Uveďme nyní za mnohé tři příklady navzájem rozdílných chaotických jevů, které na první pohled nemají nic společného, jak se však posléze ukázalo, právě matematická teorie nalezla jejich společné rysy a umožnila pochopení alespoň některých zákonitostí.

Typickým příkladem chaotického chování jsou *turbulence*, které představují vážné problémy pro konstruktéry letadel a ponorek, pro lékaře i atomové fyziky. Vzdušné turbulence likvidují nosnou sílu letadel, vodní turbulence mohou způsobit havárii ponorek, turbulentní jevy při proudění krve v cévách jsou vážným zdravotním rizikem. Nástup turbulence je možné laboratorně měřit a popisovat, všechny poznatky jsou však jen dílčí a podstata jevu nám stále uniká. Řada slavných fyziků se zabývala studiem turbulencí a výsledek byl téměř nulový. O vynikajícím německém fyzikovi, jednom ze zakladatelů kvantové mechaniky Werneru Heisenbergovi, se vyprávělo, že na smrtelném loži prohlásil, že bude mít na Boha dvě otázky: Proč teorie relativity a proč turbulence? A pak prý tiše dodal: „Opravdu věřím, že by na první otázku mohl mít odpověď."

Pro druhý příklad sáhněme do živočišné říše.

Biologové pro zkoumání populačního vývoje pracovali (a pracují) se zjednodušeným modelem známým pod názvem „dravec a kořist". Přitom nezáleží na tom, zda se jedná o lišky a králíky, ryby a jejich potravu v rybníku či káňata a myši. Je-li dostatek kořisti, dravci se množí a kořisti se začíná nedostávat. Populace dravců klesá, kořist začíná mít příznivější podmínky k množení a přibývá jí, na což dravci reagují zvyšováním svého stavu a tak stále dokola. Tyto procesy popisuje tzv. *logistická rovnice*, která z početního hlediska není nijak komplikovaná. Popisy jednotlivých situací se liší různou hodnotou jistého parametru, který v této rovnici vystupuje. Ukázalo se však, že při některých hodnotách tohoto parametru systémy spějí k jistému víceméně stabilnímu stavu, při jiných hodnotách hodnoty populace oscilují mezi několika významně odlišnými hodnotami a pro některé hodnoty se systém chová naprosto chaoticky, nepředvídatelně. Důvody tohoto stavu a nějaké zákonitosti těchto jevů se však nedařilo nalézt.

Pro třetí příklad se obraťme k chování počasí.

Předpověď počasí se po dlouhá staletí pravděpodobně řídila vypozorovanou analogií. Přestože bylo samozřejmé, že je vývoj počasí podroben stejným fyzikálním zákonitostem jako ostatní přírodní procesy, bylo chování počasí natolik složité a bylo podřízeno tolika faktorům, že teprve zhruba od poloviny dvacátého století se začalo pracovat na modelech jeho vývoje. Že je však tento vývoj deterministický, bylo samozřejmé, a tak se zdálo, že zlepšování prognóz je jen otázkou dostatečně rychlého zpracování dostatečně přesných vstupních údajů. Jak to psal Laplace již v 18. století ve svých úvahách o „nejvyšší inteligenci“ a kauzálním vývoji světa: *Tato inteligence by stejným způsobem uchopila pohyby největších vesmírných těles jako i nejlehčích atomů, neboť nic by nebylo ponecháno nejistotě a budoucnost bychom měli před očima stejně jako minulost.*

Nám samozřejmě není dáno poznat přesně stavy všech částic ve vesmíru v daném okamžiku, takže naše předpovědi dalšího vývoje jsou nutně nepřesné. Zmenšování chyb ve vstupních datech by však logicky mělo vést ke zpřesňování předpovědí. To se samozřejmě netýká jen počasí a zkušenost nás v tom mnohokrát utvrzovala. Při výpočtu návratu pozorované komety je předpověď tím lepší, čím přesněji změříme její aktuální polohu při přiblížení ke Slunci. Při navádění kosmické sondy k přistání na Marsu samozřejmě potřebujeme co nejpřesnější údaje o její poloze a rychlosti; zpřesnění těchto údajů usnadní přistávací manévr. Zdálo se, že víra v konvergenci předpovědí ke skutečnému vývoji při zlepšování vstupů je zcela oprávněná. Tento předpoklad se stal jedním z pilířů klasické vědy. Často bylo toto přesvědčení formulováno zhruba takto: *Není potřeba brát v úvahu list padající na planetě v jiné galaxii, když se pokoušíme popsat pohyb kulečníkové koule na stole na Zemi. Velmi malé vlivy je možné zanedbat. V chování věcí se uplatňuje konvergence; zanedbatelně malé vlivy se neznásobí tak, aby měly libovolně velké účinky.*

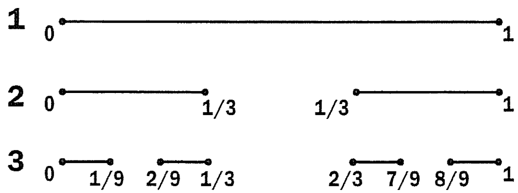
Brzy se však mělo ukázat, jak naivní byly tyto představy. Jejich zborcení přineslo právě zkoumání vývoje počasí. Na počátku šedesátých let 20. století byla výpočetní technika stále ještě na počátku svého rozvoje. Přestože i ty největší počítače té doby byly ve srovnání s tím, co má dnes většina z nás na svém pracovním stole, pouhými muzeálními zkamenělinami, umožnily i tyto počítače zahájení prací na strojovém zpracování matematických modelů vývoje počasí. Jednou z vůdčích osobností v tomto směru byl Edward Lorenz, který pracoval v proslulém Massachusettském technologickém institutu. Do svého počítače vkládal dlouhé řetězce dat o stavu atmosféry a počítač pomalu vydával své předpovědi dalšího vývoje. Jednoho dne v roce 1961 chtěl Lorenz jeden z dřívějších výpočtů podrobněji zkontrolovat a tak pustil stejný program znovu. Ke svému úžasu však zjistil, že počítač vydává předpověď, která se záhy velmi dramaticky lišila od původní. To se zdálo samozřejmě nemožné, neboť ze stejných vstupních údajů nebylo možno stejným programem obdržet odlišné řešení. Celá věc se však velmi rychle vyřešila. Původní program pracoval se vstupními údaji uváděnými na šest desetinných míst. Při opakování výpočtu však Lorenz vložil vstupní údaje – tak je tiskla připojená tiskárna – zaokrouhlené na tři desetinná místa. Tento rozdíl prakticky neměl mít na další vývoj žádný vliv. Vždyť čtvrté desetinné místo je stejně víceméně fiktivní; například při měření teploty odpovídá desetitisícině stupně Celsia. S takovou přesností žádná meteorologická stanice stejně nepracuje. A přesto se ukázalo, že tento „zanedbatelný" rozdíl má přímo fatální důsledky pro další vývoj.

Od doby, kdy si uvedeného faktu povšiml Lorenz, se vývoj samozřejmě nezastavil. Modely vývoje počasí se výrazně vylepšily, počítače nám umožňují v nepředstavitelně krátkém čase vypočítat dříve netušené množství výsledků, a přesto se nám mnohdy oprávněně zdá, že s námi příroda přímo laškuje. V matematické teorii, která se v této souvislosti vyvinula a která rozbourala dřívější naivní představy o možném zpřesňování výsledků, které přinese pouhé zpřesňování vstupních údajů, se ustálil termín *efekt motýlího křídla.* Obrazně řečeno: vzlétnutí motýla v povodí Amazonky může ve svých důsledcích o týden později způsobit řádění uragánu na Floridě.

Fraktály

Klíčovou osobností pro rozvoj teorie chaosu se stal matematik Benoit Mandelbrot. Narodil se ve Varšavě v r. 1924, ještě před druhou světovou válkou však jeho rodina emigrovala do Francie, kde Benoit vystudoval. Po krátkém působení na akademickém pracovišti přešel do aplikovaného výzkumu a posléze odešel do USA.

V šedesátých letech pracoval u IBM a zabýval se problematikou přenosu informací. Šum v telefonních linkách občas překryl originální signál. A tak se v přenosu střídala místa bez chyb s místy, kde se chyby nakupily. Při podrobnějším zkoumání se však ukázalo, že i úseky s mnoha chybami se skládají z kratších úseků bez chyb vystřídaných úseky s více chybami. Takto se Mandelbrot nořil hlouběji a hlouběji do struktury těchto přenosů a uvědomil si analogii se situací, kdy se zabýval ekonomickými aplikacemi a studoval vývoj cen na burze. Ceny střídavě rostly a klesaly, v každém delším úseku s růstem cen se však vyskytovaly kratší úseky, kdy cena klesala a naopak. Oba tyto případy mu připomínaly jistou matematickou strukturu známou v čisté matematice, tzv. *Cantorovo diskontinuum* (viz obr. 1).



Obr. 1

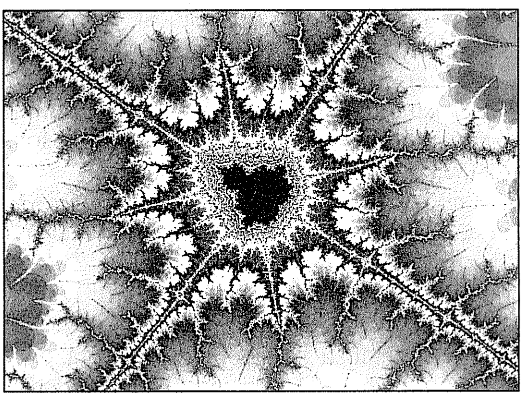
Zakladatel teorie množin, německý matematik Georg Cantor, studoval tuto množinu – samozřejmě ze zcela jiných důvodů – na sklonku 19. století. Diskontinuum vznikne tak, že se z úsečky o délce 1 vyjme prostřední třetina. V každé ze zbylých dvou úseček se opět vyjme prostřední třetina atd. Cantorovo diskontinuum je množina bodů, které zůstanou z původní úsečky po provedení nekonečně mnoha popsaných kroků. Tato množina má řadu pozoruhodných vlastností a pro Mandelbrota se stala odrazovým můstkem pro další úvahy.

Zhruba ve stejné době se Mandelbrotovi dostal do rukou článek jistého anglického obskurního vědce z první poloviny 20. století – Lewise F. Richardsona, který si povšiml řady nesrovnalostí v různých pramenech o délce vzájemné hranice některých evropských států. Richardsonovy výsledky Mandelbrota inspirovaly k úvahám o délce pobřeží Velké Británie. Přes zdánlivou banalitu je v této otázce skryt velký problém: v jistém smyslu je délka tohoto pobřeží nekonečná. Jak ji totiž můžeme měřit? Představme si, že si vezmeme do ruky metrovou tyč a celé pobřeží s ní obejdeme. Naměřená délka je samozřejmě jen aproximací skutečné délky, protože při kladení metrové tyče řadu zákoutí a jiných nepravidelností přehlédneme a zanedbáme. Při měření decimetrovou tyčkou bychom zřejmě přišli k jinému výsledku. A jaký je vlastně tvar tohoto pobřeží? Při pohledu z družice bychom zřejmě viděli něco jiného než při chůzi a ještě jinak by to vše vnímal mravenec, který by pečlivě obkroužil každý oblázek a každou nerovnost. Přesto však něco blíže nespecifikovaného při změně měřítka ve tvaru pobřeží zůstává zachováno, podobně jako vzájemně do sebe vnořeny zůstávají zachovány některé rysy přenosu signálů nebo vývoje cen na burze; analogickou „soběpodobnost" však lze nalézt ve spoustě jiných příkladů, které si Mandelbrot začal vybavovat – záznam EKG, historické záznamy o záplavách na Nilu, stavba vesmíru, tvar mraků na obloze aj. Reálný svět je odlišný od světa klasické eukleidovské geometrie, která zkoumá úsečky, přímky, roviny, koule, jehlany a obdobné plochy a tělesa. Mrak však není koule, blesk se nešíří po přímce, hory nejsou kužele – reálný svět je jiný než svět klasické geometrie. Jak však tuto stavbu světa popsat?

Východiskem se Mandelbrotovi stal v matematice dobře známý pojem dimenze. Aniž bychom se pouštěli do podrobnějšího popisu, je čtenáři jistě zřejmé, co rozumíme tím, když říkáme, že přímka má dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor, v němž žijeme, má (alespoň doufáme) dimenzi 3. Jaká je však dimenze takových podivných množin, jako je výše zmíněné Cantorovo diskontinuum? Odpověď na tuto otázku nabídl již na počátku 20. století německý matematik Felix Hausdorff, který zavedl pojem dimenze tak, že mohla nabývat i neceločíselných hodnot. Tento Hausdorffův pojem Mandelbrotovi umožnil přesně matematicky popsat řadu podivuhodných struktur, které v průběhu let zkoumal a pro které se vžilo pojmenování *fraktály*.

O vzniku tohoto pojmenování sám Mandelbrot napsal, že ho napadlo někdy v r. 1975, kdy chystal svou první knihu na toto téma a přemýšlel, jak studované útvary a geometrii s nimi spojenou pojmenovat. Tehdy listoval v synově latinském slovníku a narazil na přídavné jméno *fractus* (zlomený). Podobnost s anglickými slovy *fracture* (zlomenina) a *fraction* (zlomek) se mu zdála přiléhavá, a tak vymyslel nové slovo *fraktál*, které znělo ve francouzštině i v agličtině (a dnes již i v češtině) stejně a dobře vystihovalo směr jeho úvah.

Fraktální geometrie se v posledních třech desetiletích intenzivně rozvíjela a umožnila popsat řadu struktur, které vzdorovaly klasické matematice. Teorie fraktálů se tak stala jedním z nejvýznamnějších výsledků moderní matematiky konce 20. století. Obrázky uměle vytvořených fraktálů jsou navíc neobyčejně esteticky působivé (viz obr. 2 – v barevném provedení je dojem samozřejmě nesrovnatelný s černobílou reprodukcí), a tak se začaly



Obr. 2

objevovat na obálkách knih, v kalendářích, reklamách a jinde, aniž si vůbec jejich tvůrci a diváci uvědomovali, že se dívají na matematické objekty.

Mandelbrotova množina

S Mandelbrotovým jménem je spojen i jiný matematický objekt, který umožnil popsat některé stránky a projevy chaosu, tzv. *Mandelbrotova množina.*

Řada matematiků včetně Mandelbrota se snažila přijít na nějaké „jednoduché“ modely, které by umožnily zkoumat některé složité jevy, jako je již zmíněná turbulence. Díky výpočetní technice se ukázalo, že některé na první pohled jednoduché modely umožňují nahlédnout doslova do nekonečných hlubin přírodních jevů.

Východiskem se stala metoda tzv. *iterací*, což je relativně snadno popsatelná záležitost. Vezměme nějakou jednoduchou funkci, třeba $f(x) = x^2$. Zvolíme-li si nějaké číslo, například 2, je funkční hodnota uvedené funkce v tomto čísle $2^2 = 4$. V takto získané hodnotě můžeme opět vypočítat funkční hodnotu $4^2 = 16$ atd. Postupně tak získáváme posloupnost

$$2, 4, 16, 256, \ldots$$

jejíž členy velmi rychle rostou. Když však začneme zcela analogicky v bodě 1/2, dostaneme posloupnost

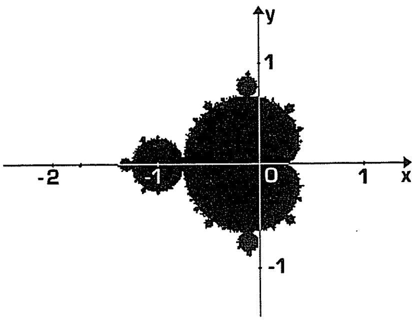
$$1/2, 1/4, 1/16, 1/256, \ldots$$

jejíž členy se rychle přibližují k nule.

Analogicky lze postupovat i v rovině. Čtenář – nematematik si možná vzpomíná, že každému bodu (a,b) v rovině lze přiřadit komplexní číslo a + bi, přičemž číslo i má tu podivnou vlastnost, že $i^2 = -1$. Vezmeme-li si nějakou funkci v komplexním oboru, například $f(z) = z^2$, a vyjdeme-li z nějakého čísla, můžeme tvořit zcela analogicky posloupnost iterovaných hodnot stejně, jako jsme to dělali před chvílí. Členy této posloupnosti se mohou chovat libovolně – mohou se zvětšovat, zmenšovat i chovat naprosto nepravidelně, záleží na výchozích hodnotách.

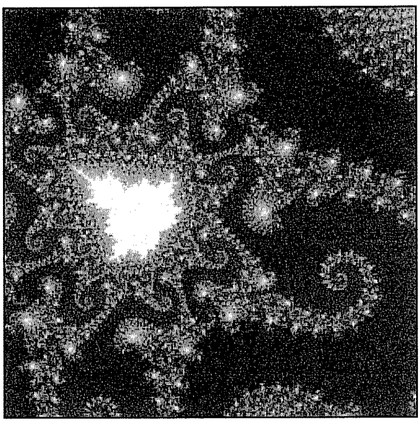
Mandelbrot v této situaci využil počítače. Uvážíme-li funkci $f(z) = z^2 + c$, kde c je nějaká konstanta, a vyjdeme-li z bodu 0, dostaneme pro každé c posloupnost postupně počítaných hodnot. Znázorníme-li si část roviny jako obrazovku počítače, může se stát, že některé posloupnosti v prvních tisíci hodnotách „utečou“ z obrazovky ven (hodnoty se rychle zvětšují), některé posloupnosti zůstanou celé na obrazovce. Takto v každém bodě obrazovky (těch bodů jsou samozřejmě tisíce) spočítáme prvních tisíc hodnot, což by samozřejmě bez počítače bylo nemožné. Výchozí body posloupností, které z obrazovky utečou, vybarvíme bíle, výchozí body druhého typu černě.

Na obr. 3 vidíme výsledek tohoto procesu, tzv. Mandelbrotovu množinu.



Obr. 3

Bílá a černá plocha sama o sobě není nijak zajímavá; to podstatné se odehrává na rozhraní černé a bílé barvy. To, co na obr. 3 vypadá jako mírné roztřepení okrajů, se při podrobnějším zkoumání ukazuje jako tajuplný propletenec nejrůznějších tvarů, jako podivuhodná fraktálová struktura, jejíž tajuplnosti nejsou dodnes úplně odhaleny. Jen na ukázku: po nepředstavitelně velkém zvětšení malého kousku tohoto rozhraní obdržíme strukturu znázorněnou na obr. 4.



Obr. 4

V tomto kousku opět vidíme, jak se z hlubin vynořuje původní obraz Mandelbrotovy množiny, jejíž okraj je opět analogicky rozostřený, takže celý proces lze znovu a znovu opakovat.

Navíc se při studiu iterací objevily některé zcela nové a nepředvídatelné skutečnosti, které překvapivě vysvětlily například nejasnosti v chování zvířecích populací. Zmiňme se alespoň o výsledku amerického fyzika Mitchella Feigenbauma (nar. 1944).

Ten rovněž studoval iterační procesy, o nichž jsme hovořili před chvílí. Podíval se však na ně z úplně jiného hlediska.

Uvažujme funkci $f(x) = x^2 + c$, kde c je nějaká konstanta, a začněme pro každou hodnotu c počítat posloupnost s prvním bodem 0. Například pro c = 1/4 tak dostaneme posloupnost

0, 1/4, 5/16, 86/256,...

jejíž hodnoty se rychle přibližují k číslu 1/2.

Zmenšujeme-li postupně hodnotu konstanty c, chovají se analogicky vytvořené posloupnosti velmi podobně: funkční hodnoty se blíží k jednomu číslu. Při hodnotě c = -13/16 však dojde ke kvalitativnímu zvratu, k tzv. *bifurkaci*: hodnoty posloupnosti začnou oscilovat kolem dvou různých hodnot -3/4 a -1/4. Při dalším zmenšování hodnoty konstanty c se posloupnosti zase chovají analogicky – oscilují mezi dvěma hodnotami. Až při hodnotě c = -1,3 dojde k nové bifurkaci, posloupnost začne oscilovat mezi čtyřmi různými hodnotami. Takto se nové bifurkace objevují stále rychleji a rychleji, až při hodnotě c = -1,8 dojde k novému kvalitativnímu zvratu – posloupnost se začne chovat zcela chaoticky.

Feigenbaum se pokusil najít nějakou zákonitost v nástupu nových bifurkací. Když vydělil délky dvou po sobě jdoucích úseků bez bifurkací, dostával neustále jedno číslo, přibližně 4,669. Překvapivě totéž číslo hrálo důležitou roli v úvahách australského biologa Roberta Maye, který studoval problematiku zvířecích populací. Jak to bylo možné? Feigenbaum vyzkoušel hledat bifurkace i u jiných funkcí, než původně zamýšlel. A zjistil ke svému překvapení, že u všech studovaných funkcí, včetně té, která vystupuje v logistické rovnici popisující chování zvířecích populací, se nástup nových bifurkací řídí stejným pravidlem: neomylně nastupují tak, že podíl délek jednotlivých intervalů je cca 4,669. Toto číslo bylo nazváno *Feigenbaumovou konstantou.* Tato konstanta zcela evidentně vypovídá něco důležitého o povaze přírody, stejně jako například gravitační konstanta nebo číslo π. Proč je však právě taková, jaká je, o tom nemáme ani nejmenší tušení.

Přesto však teorie bifurkací pomohla odhalit mnohé zákonitosti, které se původně jevily jako zcela neprůhledné a nevysvětlitelné.